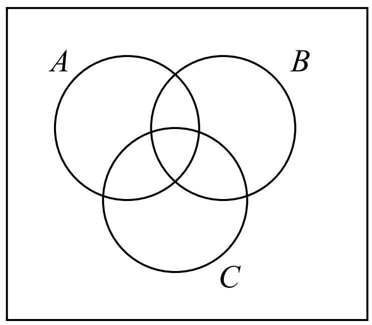
UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
CO3121 PROBABILIDADES PARA INGENIEROS
PROBLEMARIO

Problemario 1: Teoría de Conjuntos y Espacios Muestrales

1.1.- Trace los diagramas de Venn para verificar que para cualquier par de conjuntos A y B se cumplen las Leyes de Morgan (1.3).

1.2.- Tres eventos se muestran en el siguiente diagrama de Venn:



Reproduzca la figura anterior sombreando la región que corresponda a cada uno de los siguientes eventos:

a) $A^c \cap B$ b) $(A \cup B) \cap C$ c) $(A \cap B) \cup C$ d) $(A \cap B)^c \cup C$

1.3.- Supóngase que el conjunto universal consta de los enteros positivos del 1 al 10. Sean $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ y $C = \{5, 6, 7\}$. Anote los elementos de los siguientes conjuntos:

a) $A^c \cap B$ b) $A^c \cup B$ c) $(A^c \cap B^c)^c$ d) $\left(A \cap (B \cap C)^c\right)^c$ e) $(A \cap (B \cup C))^c$

1.4.- Supóngase que el conjunto universal U está dado por $U = \{x \mid 0 \le x \le 2\}$. Sea los conjuntos A y B definidos como sigue: $A = \{ x \mid ½ < x < 1\}$ y $B = \{ x \mid ¼ \le x \le 1½\}$. Describa los conjuntos siguientes:

a) $(A \cup B)^c$ b) $A \cup B^c$ c) $(A \cap B)^c$ d) $A^c \cap B$

1.5.- Supóngase que el conjunto universal consta de todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas son enteros no negativos. Indique los elementos de los conjuntos siguientes:

$A = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \le 6\}$,
$B = \{ (x, y) \mid 1 \le xy \le 4\}$
$C = A \cap B$
$D = A \cap C^c$

1.6.- Los artículos provenientes de una línea de producción se clasifican como defectuosos (D) y no defectuosos (N). Se observan los artículos y se anota su condición. Este proceso continúa hasta que se produzcan dos artículos defectuosos o se verifiquen cuatro artículos, cualesquiera que ocurra primero. Describir el Espacio Muestral (S) para este experimento.

1.7.- Describir el Espacio Muestral para los siguientes experimentos:

a) Una caja con N bombillas tiene r ($r < N$) unidades con filamentos rotos. Éstas se prueban una por una, hasta que se encuentra una defectuosa.

b) Supóngase que las bombillas anteriores se prueban una por una, hasta que se prueban todas las defectuosas.

1.8.- Considérense cuatro objetos, a, b, c y d. Supóngase que el orden en el cual se anotan estos objetos representa el resultado de un experimento. Sean A y B los eventos definidos como sigue: A = {a está en primer lugar}; B = {b está en el segundo lugar}

a) Anotar los elementos del Espacio Muestral.

b) Anotar todos los elementos de los eventos $A \cap B$ y $A \cup B$

1.9.- Se lanza una moneda tres veces consecutivas, describa el Espacio Muestral en cada uno de los siguientes casos:

a) Si interesa el resultado de cada lanzamiento.

b) Si interesa el número total de caras.

1.10.- Se arrojan dos dados y se observan los puntos de cada dado:

a) Describa el Espacio Muestral.

b) Describa los siguientes sucesos:

i) Sale al menos un tres.

ii) Sale a lo sumo un tres.

iii) Sale exactamente un tres.

iv) La suma de los puntos es siete.

Problemario 2: Propiedades de las Probabilidades y Métodos de Conteo

2.1.- Indique para que casos se cumple que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, y para que casos se cumple que: $P(A \cup B) < P(A) + P(B)$. Asuma que todos los elementos del Espacio Muestral S tienen $P > 0$.

2.2.- Supongamos que el espacio muestral $S = A \cup B$ y $P(A \cap B) = 0.2$ Hallar:

a) El máximo valor posible para $P(B)$, de tal manera que se cumpla $P(A) \geq P(B)$

b) $P(A^c)$, sabiendo que $P(B) = 0.7$

c) $P(A^c \cap B^c)$

2.3.- Supóngase que A y B son eventos para los cuales $P(A) = x$, $P(B) = y$, y $P(A \cap B) = z$. Expresar cada una de las probabilidades siguientes en términos de x, y y z.

a) $P(A^c \cup B^c)$ b) $P\left(A^c \cap B\right)$ c) $P\left(A^c \cup B\right)$ d) $P\left(A^c \cap B^c\right)$

2.4.- Supóngase que A, B y C son eventos tales que $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = P(C \cap B) = 0$ y $P(A \cap C) = \frac{1}{8}$. Calcular la probabilidad de que al menos uno de los eventos A, B o C ocurra.

2.5.- En una habitación se encuentra el siguiente grupo de personas: 5 hombres mayores de 21, 4 hombres menores de 21, 6 mujeres mayores de 21 y 3 mujeres menores de 21. Se elige una persona al azar. Se definen los eventos siguientes: A = {la persona es mayor de 21}; B = {la persona es menor de 21}, C = {la persona es hombre}, D = {la persona es mujer}. Evaluar lo siguiente: a) $P(B \cup D)$ b) $P\left(A^c \cap C^c\right)$

2.6.- Se lanza una moneda 8 veces, hallar la probabilidad de que:
a) se obtengan exactamente 5 caras.
b) se obtengan a lo sumo 4 sellos.

2.7.- Un cargamento de 1500 transformadores contiene 400 defectuosos y 1100 no defectuosos. Se eligen al azar 200 transformadores (sin substitución) y se clasifican.
a) ¿Cual es la probabilidad de que se encuentren exactamente 90 transformadores defectuosos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren al menos 2 transformadores defectuosos?

2.8.- Un lote consta de 10 artículos sin defecto, 4 con pequeños defectos y 2 con defectos graves. Se eligen dos artículos al azar (sin substitución), encontrar la probabilidad de que:
a) ambos sean buenos
b) ambos tengan defectos graves
c) al menos uno sea bueno
d) a lo más uno sea bueno
e) exactamente uno sea bueno
f) ninguno tenga defectos graves
g) ninguno sea bueno

2.9.- En un juego de Poker de 52 cartas, se extraen 4 de ellas sin reposición.
a) Determine la probabilidad de que por lo menos una carta sea un As.
b) Determine la probabilidad de que las cuatro cartas tengan el mismo color.

2.10.-Una caja contiene esferas numeradas 1, 2, 3, …, n. Se escogen dos esferas al azar. Encontrar la probabilidad de que los números sobre las esferas sean enteros consecutivos, si:
a) Las esferas se escogen sin substitución,
b) Las esferas se escogen con substitución.

Problemario 3: Probabilidad Condicional, Teorema de Bayes e independencia

3.1.- La siguiente tabla contiene las probabilidades correspondientes a las intersecciones de los eventos indicados:

	B	B^c
A	0.4	0.2
A^c	0.15	0.25

a) Hallar $P(A \mid B)$
b) Hallar $P(B \mid A)$
c) Hallar $P(A^c \mid B)$
d) Hallar $P(B^c \mid A)$

3.2.- Una caja contiene 4 tubos malos y 6 buenos. Se sacan 2 a la vez. Se prueba uno de ellos y se encuentra que es bueno. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro también sea bueno?

3.3.- Se tienen 20 artículos, 12 de los cuales son defectuosos y 8 no defectuosos. Se inspeccionan uno después de otro. Si estos artículos se escogen al azar, ¿cuál es la probabilidad de que:

a) Los dos primeros artículos inspeccionados sean defectuosos?
b) Los dos primeros artículos inspeccionados sean no defectuosos?
c) Entre los dos primeros artículos inspeccionados haya uno defectuoso y uno no defectuoso?

3.4.- Un bolso contiene tres monedas, una de las cuales está acuñada con dos caras, mientras que las otras dos monedas son normales. Se escoge una moneda al azar y se lanza cuatro veces en forma consecutiva. Si cada vez sale cara, ¿Cuál es la probabilidad de que ésta sea la moneda con dos caras?

3.5.- Un examen para detectar la presencia de un virus, detecta al virus en un 95% de los casos, cuando este esta presente; pero puede presentar un falso resultado positivo en un 2% de los casos. Si en determinada población la enfermedad aparece en alrededor del 0.3% de las personas, calcule:

a) La probabilidad de que el examen resulte positivo,
b) La probabilidad de que una persona tenga la enfermedad dado que el resultado fue positivo.
c) ¿Qué tan bueno y confiable es este examen? ¿Qué podría hacer para mejorarlo?

3.6.- En una fábrica de pernos, las máquinas A, B y C fabrican 25, 35 y 40% de la producción total, respectivamente. De lo que producen, 5, 4 y 2% respectivamente, son pernos defectuosos. Se escoge un perno al azar y resulta ser defectuoso. ¿Cuáles son las probabilidades respectivas de que el perno provenga de la máquina A, la B o la C ?

3.7.- Se lanza un dado y de manera independiente se escoge al azar una carta de una baraja de Poker. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) el dado muestre un número par y la carta sea de un palo rojo?
b) el dado muestre un número par o la carta sea de un palo rojo?

3.8.- Se lanza un dado n veces, ¿Cuál es la probabilidad de que "6" salga al menos una vez en los n lanzamientos?

3.9.- Un tubo al vacío puede provenir de cualquiera de tres fabricantes con probabilidades $P_1 = 0.25$, $P_2 = 0.50$ y $P_3 = 0.25$. Las probabilidades de que el tubo funcione correctamente son iguales a 0.1, 0.2 y 0.4, respectivamente, para los tres fabricantes. Calcular la probabilidad de que un tubo elegido al azar funcione correctamente.

3.10.- Existen 2 caminos para ir de A hasta B, y 2 caminos para ir desde B a C. Cada uno de los caminos tiene probabilidad p de estar bloqueado, independientemente de los otros. Hallar la probabilidad de que haya un camino abierto de A a B, dado que no hay camino de A a C.

Problemario 4: Distribución de una Variable Aleatoria Discreta

4.1.- Se sabe que el 65% de los consumidores de cerveza de una comunidad prefiere la marca clasificada como A. Si se escogen al azar 10 personas, calcular la probabilidad de que:

a) ninguno prefiera la cerveza A,
b) exactamente cuatro prefiera la cerveza A,
c) a lo sumo cuatro prefieran la cerveza A,
d) al menos seis prefieran la cerveza A,

4.2.- De un lote que contiene 25 artículos, 5 de los cuales son defectuosos, se eligen 4 al azar. Sea X el número de artículos defectuosos encontrados. Obtener la distribución de probabilidad de X si:

a) los artículos se escogen con substitución.

b) los artículos se escogen sin substitución.

4.3.- Un estanque contiene 500 peces de los cuales 300 están marcados. Un pescador logra sacar 50 peces. Hallar la probabilidad de que:

a) 20 de los peces estén marcados,

b) Ninguno de los peces este marcado.

4.4.- Un depósito guarda 1000 artículos, 100 de los cuales son defectuosos. Un inspector toma uno de los artículos al azar, y si no es defectuoso lo devuelve al lote. Sea N el número de inspecciones de objetos no defectuosos, que se realizan antes de encontrar el primer objeto defectuoso. Calcular la probabilidad de tener $25 \leq N \leq 60$.

4.5.- La probabilidad de que el lanzamiento de un cohete sea exitoso es igual a 0.8. Supóngase que se hacen ensayos hasta que ocurren 3 lanzamientos exitosos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sean necesarios 6 intentos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sean necesarios menos de 6 intentos?

4.6.- En la situación descrita en el problema 4.5 suponga que los ensayos de lanzamientos se hacen hasta que ocurren tres lanzamientos *consecutivos* exitosos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sean necesarios 6 intentos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sean necesarios menos de 6 intentos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sean necesarios mas de 7 intentos?

4.7.- Si X tiene una distribución de Poisson y si $P(X = 0) = 0.2$, calcular $P(X > 2)$:

4.8.- Suponer que la probabilidad de que un artículo producido por una máquina especial sea defectuoso es igual a 0.2. Si 10 artículos se seleccionan al azar, ¿Cuál es la probabilidad que no se encuentre más de un articulo defectuoso? Usar las distribuciones binomial y de Poisson y comparar las respuestas.

4.9.- Supóngase que X tiene una distribución de Poisson. Si $P(X = 2) = \frac{2}{3}P(X = 1)$, calcular $P(X = 3)$.

4.10.- Supóngase que un libro de 585 páginas contiene 43 errores tipográficos. Si estos errores están distribuidos aleatoriamente a lo largo del libro, ¿Cuál es la probabilidad de que 10 páginas seleccionadas al azar estén libres de errores? (Suponga que el número de errores por página tiene una distribución de Poisson.)

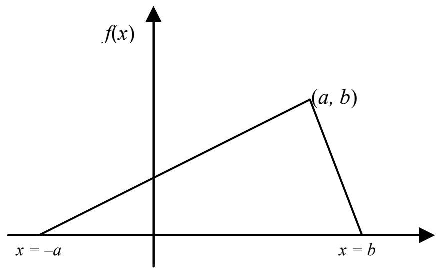
Problemario 5: Distribución de Variables Aleatorias Continuas

5.1.- Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} c(4x - 2x^2) & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{si } x \notin (0,2) \end{cases}$$

a) Halle el valor de c.
b) Encuentre la función de distribución (acumulada).
c) Halle $P(X > 1)$.

5.2.- Suponga que la siguiente gráfica representa una la función de densidad de la variable X:



a) ¿Cual es la relación entre a y b?
b) Grafique la función de distribución acumulada.

5.3.- Suponga que la Variable X se distribuye uniformemente sobre $[-a, a]$, donde $a > 0$. Determine el valor de a para que las siguientes probabilidades sean satisfechas:
a) $P(X > 1) = 1/3$
b) $P(X < 1/2) = 0.7$

5.4.- La duración de una llamada, en minutos, es una variable aleatoria exponencial con parámetro $\lambda = 1/10$. Si una persona llega inmediatamente antes que usted a un teléfono público, encuentre la probabilidad de que usted tenga que esperar: a) más de 10 minutos; b) entre 10 y 20 minutos.

5.5.- Sea X una variable aleatoria de distribución exponencial con parámetro λ. Calcular $P(1/X \leq x)$

5.6.- El tiempo de vida en semanas de cierto tipo de lámpara es una variable aleatoria Y cuya distribución viene dada por:

$$F(y) = 1 - e^{-y^2}, \qquad \text{si } y \geq 0$$

a) Demuestre que F tiene las propiedades de una función de distribución
b) Calcule la densidad f de F
c) Calcule la probabilidad de una lámpara de este tipo dure durante al menos 2 semanas

5.7.- Sea X una variable aleatoria con distribución Normal con parámetros $\mu = 12$ y $\sigma = 3$. Halle:
a) $P(X > 3)$
b) $P(|X - 12| < 4)$
c) $P(|X - 10| > 2)$

5.8.- El gasto semanal en mantenimiento en una empresa puede modelarse con una distribución normal de media Bs. 80000. y desviación estándar Bs. 4000. ¿Cuánto se debería presupuestar para mantenimiento semanalmente, de modo que la probabilidad de que la cantidad presupuestada sea excedida, sea de tan sólo 0.1?

Problemario 6: Distribuciones Multivariadas. Distribuciones Marginales y Condicionales. Independencia

6.1.- Dos dados son lanzados. Sean X = menor valor obtenido y Y = mayor valor obtenido.:

a) Halle todas las probabilidades asociadas al par de variables (X, Y).
b) Halle el valor de la distribución (acumulada) conjunta de $F(2, 3)$.
c) Halle las probabilidades marginales de $g(X = 3)$ y de $g(Y = 3)$.
d) Halle la probabilidad condicional de X dado que $Y = 3$, para todos los valores posibles de X.
e) ¿Son X e Y independientes?

6.2.- Suponga que se sacan dos cartas al azar de una baraja de 52 cartas. Sea X el número de ases obtenidos y Y el número de reinas obtenidas.

a) Obtener la función de probabilidad conjunta de (X, Y).
b) Obtener las funciones de probabilidad marginal de X y de Y.
c) Obtener la función de probabilidad condicional de X dado Y

6.3.- Dos cápsulas se seleccionan aleatoriamente de un recipiente que contiene tres aspirinas, dos cápsulas de Tempra y cuatro cápsulas de Saridón. Sea X el número de aspirinas y sea Y el número de Tempras que se obtienen de entre las dos capsulas extraídas del recipiente.

a) Halle la función de probabilidad conjunta de (X, Y).
b) Halle $F(1,1)$
c) Halle las funciones de probabilidad marginales de X y de Y.
d) Halle la función de probabilidad condicional de X dado que $Y = 1$

6.4.- Supongamos que la función de densidad conjunta de X e Y está dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } 0 < x < 1, \;\; 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

a) Hallar $F(x, y)$
b) Halle las densidades marginales de Y.
c) Halle las densidad condicional de X dado Y.

6.5.- Un estudio en un grupo de adolescentes muestra que el número de horas diarias, X que un adolescente dedica a ver televisión y el número de horas diarias Y, que dedica a estudiar o hacer tareas tienen aproximadamente la siguiente densidad conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y} & \text{si } 0 < x < \infty, \;\; 0 < y < \infty \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

a) Hallar $F(x, y)$
b) ¿Cual es la probabilidad de que un adolescente vea televisión por más de una hora y que estudie menos de una hora?
c) ¿Cual es la probabilidad de que un adolescente dedique mas tiempo a estudiar que a ver televisión?

d) ¿Cual es la probabilidad de que el tiempo que dedica un adolescente a estudiar y a ver televisión sea de mas de una hora?
e) ¿Cual es la probabilidad de que el tiempo que dedica un adolescente a ver televisión sea de menos de a horas?
f) Si sabemos que un adolescente vio 2 horas de televisión, ¿Cual es la probabilidad de que haya estudiado por más de una hora? ¿Son X e Y independientes?

6.6.- Sea X e Y dos variables aleatorias de densidad conjunta:

$$f(x, y) = kxy, \quad \text{si } x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1$$

a) Encontrar el valor de k que hace que sea una función de densidad de probabilidad.
b) Halle las densidades marginales de cada variable.
c) Halle la densidad condicional $f(x \mid y)$.
d) ¿Son X e Y independientes?

6.7.- Demuestre que, el par (X, Y), tiene distribución uniforme sobre el rectángulo $(a, b) \times (c, d)$ si, y solo si, las variables X e Y son independientes, $X \sim \text{Unif}\,(a, b)$ y $Y \sim \text{Unif}\,(c, d)$

6.8.- Tenemos la distribución de probabilidad trivariada:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} (x + y)e^{-z} & \text{para } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ z > 0 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

a) Encuentre $P[(X, Y, Z) \in A]$, donde A es la región: $A = \{(x, y, z) : 0 < x < y < 1,\ z < 1\}$
b) Encuentre la densidad marginal conjunta de X y Z
c) Encuentre la densidad marginal de X solamente.
d) Encuentre la densidad condicional $f(y \mid x, z)$
e) Encuentre la densidad condicional $f(y, z \mid x)$

Problemario 7: Valor Esperado. Media. Varianza. Covarianza. Correlación. Esperanza Condicional. Función Generadora de Momentos.

7.1.- Sea Y una variable aleatoria con la distribución dada en la siguiente tabla.

y	$P(Y=y)$
1	0.4
2	0.3
3	0.2
4	0.1

Encuentre: a) $E(Y)$, b) $E(Y^2)$, c) $E(1/Y)$, d) $E(Y^2 - 1)$, e) $\text{var}(Y)$,
f) desv.est.(Y), g) $M_Y(t)$, h) $M_Y'(0)$, i) $M_Y''(0)$.

7.2.- Las 5 primeras repeticiones de un experimento cuestan \$10.00 cada una, y todas las subsiguientes tienen un valor de \$5.00 cada una. Suponer que el resultado se repite hasta obtener el primer resultado exitoso. Si la probabilidad de un resultado exitoso es siempre igual a 0.9 y si las repeticiones son independientes, ¿Cuál es el costo esperado de la operación completa?

7.3.- Se sabe que un lote contiene 2 artículos defectuosos y 8 no defectuosos. Si estos artículos se inspeccionan al azar, uno después del otro hasta sacar los dos defectuosos.

a) ¿Cuál es el número esperado de artículos que se deben escoger para inspección a fin de sacar todos los defectuosos?
b) ¿Cuál es la varianza de la cantidad de artículos escogidos?

7.4.- Un juego de Lotto consiste en escoger 6 números de 54. Si el jugador acierta a los 6 números premiados, recibe \$10,000,000.- , Si el jugador acierta a 5 números, recibe \$100,000.- y si acierta a 4 recibe \$1,000.-. No hay premios para menos de 4 aciertos. Si el jugador paga \$4.- por participar, ¿Cuál es su utilidad esperada (ganancia esperada menos el costo por jugar)?

7.5.- Calcular el valor esperado y la varianza de una variable aleatoria con distribución:

a) Binomial(n, p)
b) Geométrica(p)
c) Poisson(λ)
d) Uniforme(a, b)
e) Exponencial(α)
f) Normal(μ, σ^2)

7.6.- Si $Y = aX + b$, donde a y b son constantes, exprese la función generadora de momentos de Y en términos de la función generadora de momentos de la variable aleatoria X.

7.7.- Suponga que la variable aleatoria X tiene una distribución exponencial(α),

a) Encuentre su función generadora de momentos
b) Encuentre $E(X)$, $E(X^2)$ y var(X) a partir de la función generadora de momentos
c) Encuentre la función generadora de momentos de $Y = bX + c$, donde b y c son constantes.
d) Encuentre $E(Y)$ y var(Y)

7.8.- Dos cápsulas se seleccionan aleatoriamente de un recipiente que contiene tres cápsulas de Aspirina, dos cápsulas de Tempra y cuatro cápsulas de Saridón. Sea X el número de Aspirinas y sea Y el número de Tempras que se obtienen de entre las dos capsulas extraídas del recipiente.

a) Encontrar $E(X)$, $E(X^2)$, var(X), $E(Y)$, $E(Y^2)$, var(Y), $E(XY)$, cov(X, Y) y correlación(X, Y).
b) Halle $E(X + Y)$ y var($X + Y$).
c) Encontrar $E(X \mid y = 1)$, $E(X^2 \mid y = 1)$ y var($X \mid y = 1$)

7.9.- Sea X e Y dos variables aleatorias de densidad conjunta:

$$f(x, y) = 24xy, \quad \text{si } x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1$$

a) Encontrar $E(X)$, $E(X^2)$, var(X), $E(Y)$, $E(Y^2)$, var(Y), $E(XY)$, cov(X, Y) y correlación(X, Y).
b) Calcule $E(4X + Y + 3)$ y var($4X + Y + 3$).
c) Encontrar $E(X \mid y)$, $E(X \mid y = ½)$, $E(Y \mid x)$, $E(X^2 \mid y)$, var($X \mid y$), var($X \mid y = ½$) y var($Y \mid x$).

7.10.- Tenemos la distribución de probabilidad trivariada:

$$f(x,y,z)=\begin{cases}(x+y)e^{-z} & \text{para } 0<x<1,\ \ 0<y<1,\ \ z>0\\ 0 & \text{en otros casos}\end{cases}$$

a) Encuentre $E(X)$, $E(Z)$, $E(X+Z)$, $E(X^2)$, $E(Z^2)$, $\text{var}(X)$, $\text{var}(Z)$, $E(XZ)$ y $\text{cov}(X, Z)$
b) Encuentre $E(Y \mid x, z)$, $E(Y \mid x = ½ , z = 5)$, $E(Y^2 \mid x, z)$ y $\text{var}(Y \mid x, z)$
c) Encuentre $E(X + Y \mid z)$

Problemario 8: Funciones de Variables Aleatorias. Desigualdad de Chebyshev. Ley general de los grandes números. Teorema del Límite Central. Aproximación Normal a la Binomial.

8.1.- Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro α. Sea $Y = 1/X$.
a) Calcule la densidad de Y usando el método de la función de distribución.
b) Calcule la densidad de Y usando el método de transformación.
c) Verifique que $f(y)$ también es una densidad de probabilidad

8.2.- Sea $F(x)$ el valor de la función de distribución acumulada de la variable aleatoria continua X en el punto x, Encuentre la densidad de probabilidad de $Y = F(X)$.

8.3.- Sea X una variable aleatoria con distribución normal estándar. Sea $Z = X^2$. Encuentre $f(z)$

8.4.- Sea X una variable aleatoria con la siguiente densidad de probabilidad.

$$f(x)=\begin{cases}630x^4(1-x)^4 & \text{para } 0<x<1\\ 0 & \text{en otros casos}\end{cases}$$

a) Encuentre la probabilidad de que X tome un valor en el rango de ±2 desviaciones estándar de la media.
b) Usando la desigualdad de Chebyshev, obtenga la probabilidad mínima para cualquier variable aleatoria de que tome un valor en el rango de ±2 desviaciones estándar de la media.
c) Compare ambas probabilidades, la del inciso a) y la del b)

8.5.- Demuestre el resultado de la varianza de la media muestral (fórmula (8.7)).

8.6.- Demuestre el resultado del valor esperado de la varianza muestral (fórmula (8.8)).

8.7.- Una máquina dispensadora de bebida esta ajustada para que la cantidad de bebida surtida por vaso sea una variable aleatoria con una media de 200 mililitros y una desviación estándar de 15 mililitros. ¿Cual es la probabilidad de que el promedio de la cantidad de bebida dispensada en 36 operaciones (vasos) sea de por lo menos 204 mililitros?

8.8.- Si X_i, i = 1, 2, …, 10 son variables aleatorias independientes con distribución uniforme(0, 1). Calcule una aproximación para $P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i > 6\right)$.

8.9.- Se lanza una moneda 16 veces. Estime en forma aproximada las siguientes probabilidades:

a) La probabilidad de obtener 6 caras y 10 cruces.
b) La probabilidad de obtener 6 caras o menos
c) La probabilidad de obtener más de 6 caras.

8.10. Una compañía es contratada para realizar una encuesta de salida para un referendo revocatorio. Para el reporte de los resultados, se le pide una confiabilidad del 95% de que la proporción estimada de gente que va a votar "SI" no diste de mas del 3% del verdadero valor de la proporción. Tome en cuenta que la cantidad de votos "SI" por muestra tiene una distribución Binomial(n, p), donde n es la cantidad de encuestas de la muestra y p es la verdadera proporción de "SI".

a) Utilizando Chebyshev, encontrar la cantidad mínima de encuestas de salida requeridas.
b) Encontrar la cantidad mínima de encuestas requeridas. Usar la aproximación Normal a la Binomial.